

The background of the page is a faded, sepia-toned photograph of an ornate architectural ceiling. The ceiling features a central circular medallion with a classical face, surrounded by intricate geometric and floral patterns. A circular light fixture is visible in the upper right quadrant of the image.

## Apéndices



# APÉNDICE A

## 1. RELACIONES ASTRONÓMICAS SOL-TIERRA

### 1.1. Propagación de la radiación solar

La energía proveniente del sol es generada en el núcleo solar, en un proceso de fusión termonuclear en el cual el hidrógeno se transforma en helio. En este proceso, cada segundo, una masa aproximada de 4.4 millones de toneladas que irradia  $3.96 \times 10^{26}$  W se transforma en energía. El núcleo del Sol contiene cerca del 40% de la masa solar y ocupa menos del 2% del volumen total.

La radiación electromagnética proveniente del Sol se propaga radialmente en el espacio vacío; su intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia, y su comportamiento se describe empleando las ecuaciones de Maxwell de la teoría electromagnética o mediante la teoría cuántica y relativista.

La energía proveniente del Sol viaja a través del espacio como ondas electromagnéticas y plasma. En la parte superior de la atmósfera terrestre, sobre una superficie perpendicular a la radiación, se presenta una potencia promedio de  $1.367 \text{ W/m}^2$ , cantidad denominada Constante Solar. Las variaciones de la constante solar dependen de la actividad solar asociada al número de manchas presentes en la superficie solar y a cambios en la distancia Tierra-Sol como consecuencia de la órbita elíptica terrestre.

La energía solar que ingresa a la Tierra representa su principal fuente energética; el Sol proporciona el 99.97% de la energía usada para todos los procesos naturales.

### 1.2. Distancia Tierra-Sol (R)

La Tierra en su movimiento alrededor del Sol describe una órbita elíptica en la cual la distancia promedio Tierra-Sol es de aproximadamente  $149.46 \times 10^6$  km (valor llamado una Unidad Astronómica U. A.).

La órbita de la Tierra se puede describir en coordenadas polares mediante la siguiente expresión:

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \alpha} \quad (1-1)$$

donde:

R = distancia Tierra-Sol

a = unidad astronómica (semieje mayor de la elipse)

e = excentricidad de la órbita terrestre (e = 0,01673)

$\alpha$  = posición angular de la Tierra en la órbita

$$\alpha = \frac{2\pi(nd - 1)}{365} \quad (1-2)$$

nd = número del día del año

Cuando  $\alpha = 0^\circ$  la Tierra se encuentra más cerca del Sol (perihelio) (Fig. 1.1), de la ecuación 1-1 se obtiene:

$$R = a(1 - e) = 0,983 \text{ U.A.}$$

Cuando  $\alpha = 180^\circ$ , la Tierra se encuentra en la posición más distante del Sol (afelio); en este punto:

$$R = a(1 + e) = 1,017 \text{ U.A.}$$

La distancia R para efectos radiométricos, se puede expresar mediante una ecuación de fácil computo. Spencer<sup>3</sup> expresó la distancia en términos de una serie de Fourier, con un error máximo de 0,01 por ciento:

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = 1,00011 + 0,03422 \cos \alpha + 0,00128 \sin \alpha + 0,000719 \cos 2\alpha + 0,000077 \sin 2\alpha \quad (1-3)$$

donde:

$R_0$  = Distancia promedio Tierra-Sol (1 U. A.)

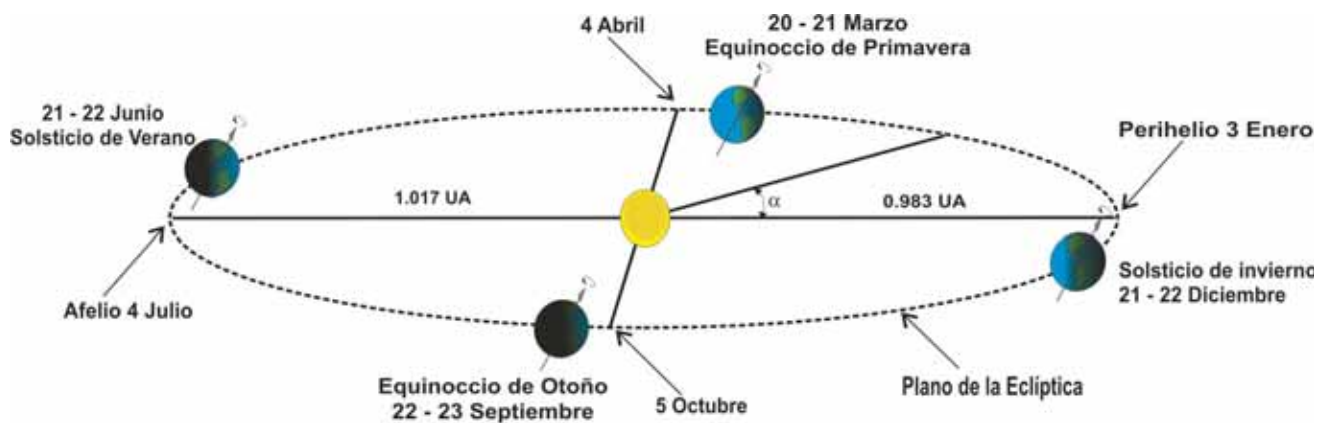


Fig. 1.1. Movimiento de la Tierra alrededor del Sol

<sup>3</sup> Spencer, J. W. Fourier Series Representation of the Position of the Sun. Search 2(5), 172 p., 1971.

### 1.3. Declinación del Sol

Cuando se analiza el movimiento de rotación y translación de la Tierra, se encuentra que su eje de rotación, con respecto al plano de translación alrededor del Sol, tiene una inclinación fija de aproximadamente 23,45° (no precesa o gira, siempre se encuentra en la

misma dirección respecto del plano de translación. Ver Figura 1.1. El eje siempre tiene la misma orientación). El ángulo formado entre el plano ecuatorial de la tierra y la línea Tierra-Sol se denomina declinación solar ( $\delta$ ). (Fig. 1.2.) Debido al movimiento de la Tierra alrededor del Sol el valor de este ángulo varía durante el año.

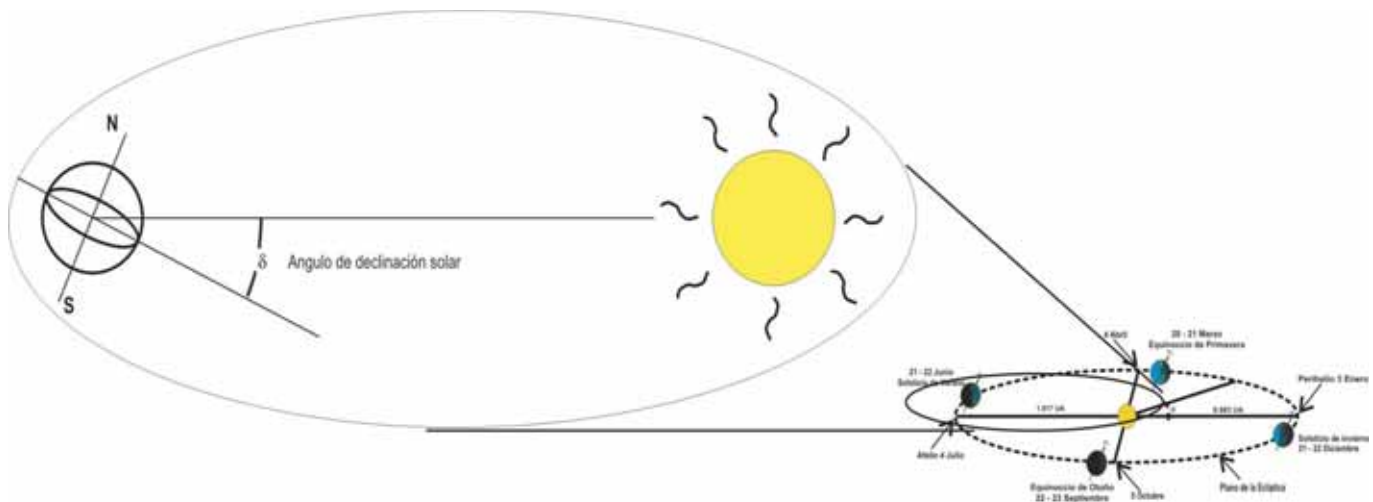


Fig. 1.2. Declinación solar

El signo de la declinación es positivo (+) cuando el Sol incide perpendicularmente sobre algún lugar en el hemisferio norte, entre el 21 de marzo (equinoccio de primavera) y el 23 de septiembre (equinoccio de otoño), y negativo (-) cuando incide perpendicularmente sobre algún lugar en el hemisferio sur, entre el 23 de septiembre (equinoccio de otoño) y el 21 de marzo (equinoccio de primavera), y varía entre -23,45°, cuando el Sol se encuentra en la parte más baja del hemisferio sur (solsticio de invierno 21/22 de diciembre)<sup>4</sup>, y +23,45°, cuando se halla en la parte más alta del hemisferio norte (solsticio de verano 21/22 de junio). Dos

veces durante el año toma valor cero, cuando el Sol pasa sobre el Ecuador terrestre, durante los equinoccios (Fig. 1.3).

Los valores diarios de la declinación solar pueden calcularse con un error máximo de 0,0006 rad., mediante otra fórmula obtenida por Spencer:

$$\delta = (0,006918 - 0,399912 \cos \alpha + 0,070257 \sin \alpha - 0,006758 \cos 2\alpha + 0,000907 \sin 2\alpha - 0,002697 \cos 3\alpha + 0,00148 \sin 3\alpha) (180/\pi) \quad (1-4)$$

<sup>4</sup> Normalmente, cuando nos referimos a invierno y verano, siempre hablamos del hemisferio norte del globo terráqueo. Recuérdese que en el hemisferio sur las estaciones son opuestas; es decir, si en el norte estamos en verano, en el sur se está en invierno.

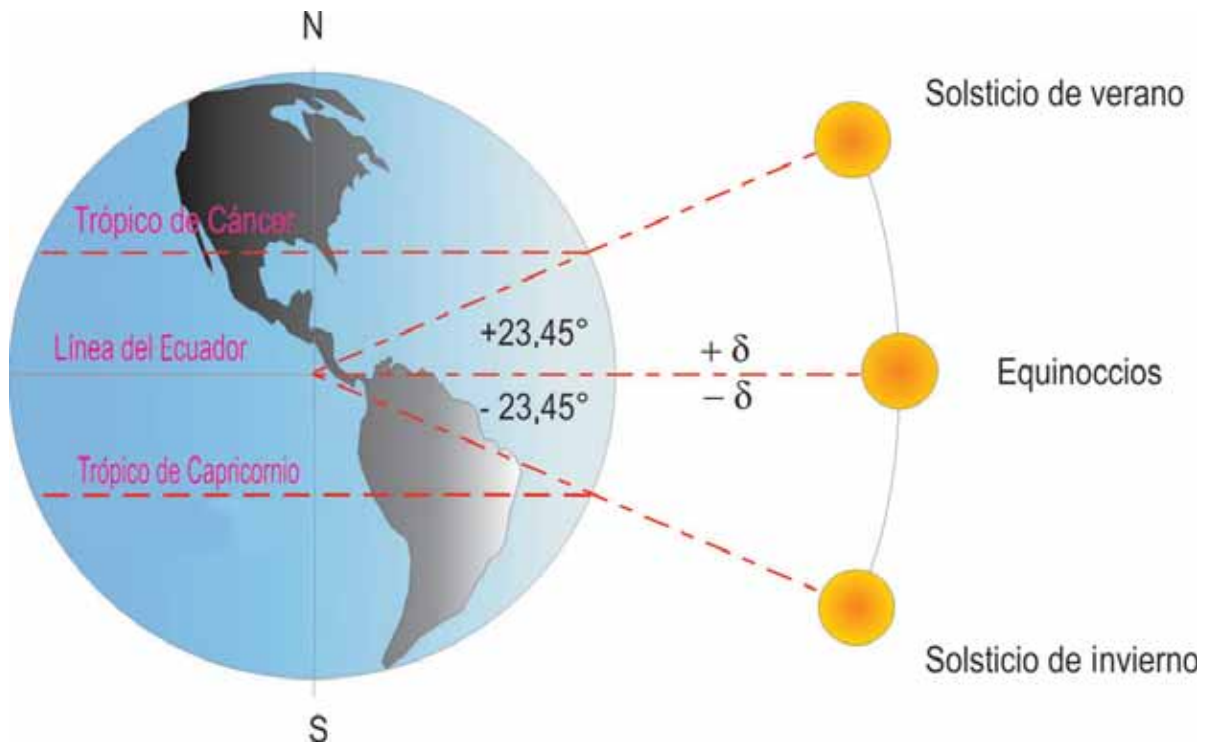


Fig. 1.3. Esquema del cambio de declinación con movimiento del Sol respecto al plano del Ecuador

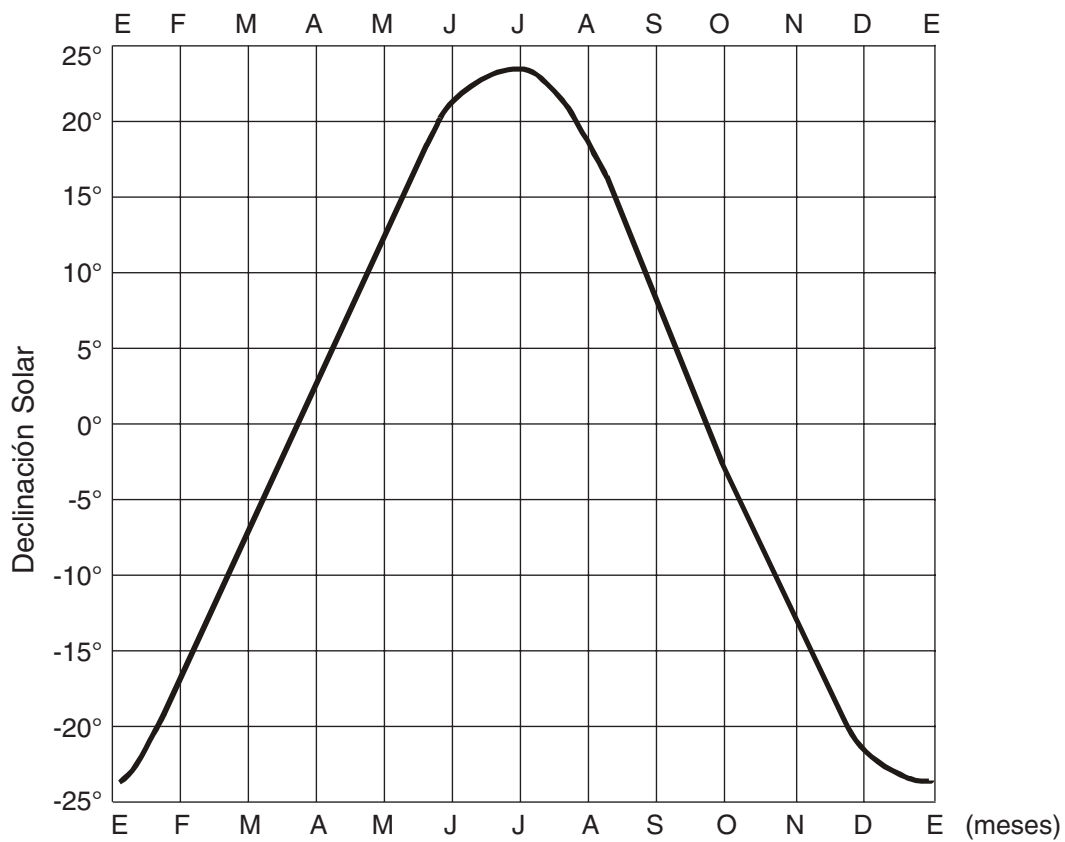


Figura 1.4. Variación anual de la declinación del Sol ( $\delta$ )

En la Fig. 1.4 se presenta la variación de la declinación del sol durante el año.

### 1.4. La Esfera Celeste

Clásicamente, el cielo ha sido representado mediante una esfera imaginaria cuyo centro se fija en la Tierra, llamada esfera celeste, lo cual permite ubicar los diferentes astros como si un observador los estuviera mi-

rando desde la Tierra y donde cada uno de sus puntos representa una dirección al cielo. La intersección con el plano imaginario del Ecuador terrestre define el Ecuador celeste. Los puntos de intersección con el eje polar terrestre se llaman polos celestes.

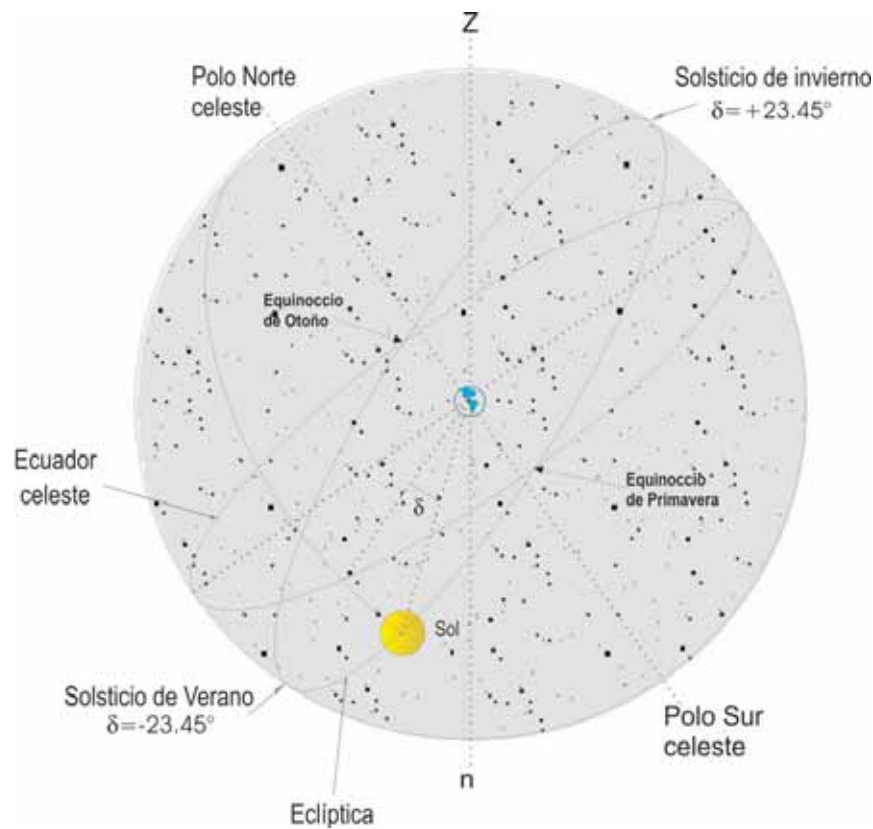


Figura 1.5. Declinación del Sol

Durante el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, la posición relativa del Sol respecto de los demás astros en la esfera celeste cambia, y puede describirse utilizando esta forma de representación como un movimiento del Sol alrededor de la Tierra en un círculo cuyo plano forma un ángulo de 23.45° con el plano del Ecuador. Dicho círculo se denomina **Eclíptica**, como se ilustra en la Figura 1.5.

El Sol recorre la Eclíptica una vez al año; y la esfera celeste, debido a la rotación terrestre, gira una vez al día alrededor de la Tierra, que permanece fija en esta representación. De esta forma, el Sol describe diariamente alrededor de la Tierra un círculo, al igual que los demás astros. Sin embargo, en la medida en que se

presenta este movimiento, en la realidad la distancia Tierra-Sol cambia, día a día siendo mínima en el **solsticio de invierno** y máxima en el **solsticio de verano**.

En el curso de un año podemos observar cómo varía la posición del Sol y su recorrido en el cielo. Para explicar este fenómeno, recurrimos a la esfera celeste. En este sistema de referencia, la Tierra permanece en el centro y el Sol describe un movimiento aparente a lo largo de la Eclíptica a razón de un grado aproximadamente por día. Cuando el Sol alcanza los puntos Aries y Libra ocurren los equinoccios (del latín: noche igual), ya que la noche y el día tienen la misma duración en todos los lugares de la Tierra. Tomando como referen-

cia un observador localizado en el hemisferio norte, entre ambos equinoccios hay dos posiciones significativas denominadas solsticios (latín: parada prolongada del Sol). El solsticio de verano ocurre el 21 de junio, el día más largo del año, y el solsticio de invierno, el 22 de diciembre, que es el día más corto.

Los puntos por donde el Sol sale y se pone en el horizonte cambian en el curso del año. El primer día de la primavera y del otoño el Sol sale exactamente por el Este y se pone por el Oeste (analizar la rotación terrestre en los equinoccios mirando las Figuras 1.1 y 1.5). Al acercarnos al solsticio de verano, las posiciones de salida y ocaso avanzan hacia el Norte, aumentando también su recorrido del sol en el cielo, que es máximo en este solsticio. Desde el equinoccio de otoño la salida y puesta del Sol retroceden hacia el Sur, alcanzando la trayectoria del Sol un valor mínimo en el solsticio de invierno. En el hemisferio norte, el ángulo que forma la vertical del lugar con la dirección de los rayos del Sol es más pequeño en el solsticio de verano, donde

los rayos solares son casi perpendiculares a la superficie. Por el contrario, en invierno el ángulo es mayor y los rayos caen oblicuamente; por esta razón, y porque los días son más largos, hace más calor en verano que en invierno. Hay lugares en la Tierra, como la parte central del Círculo Polar Ártico, donde el Sol no se pone, durante seis meses, en el verano, al contrario de lo que ocurre en invierno, cuando las noches duran igual tiempo.

## 1.5. Sistemas de coordenadas

La posición del Sol en la esfera celeste se puede determinar mediante los sistemas de coordenadas horizontales y ecuatoriales.

### 1.5.1. Sistema de coordenadas celestes horizontales

En el sistema de coordenadas celestes horizontales ilustrado en la Fig. 1.6 se determina la posición del Sol mediante los ángulos llamados azimut,  $A_z$ , y la distancia zenital,  $Z_o$ , o su complemento, la altura solar  $h$ .

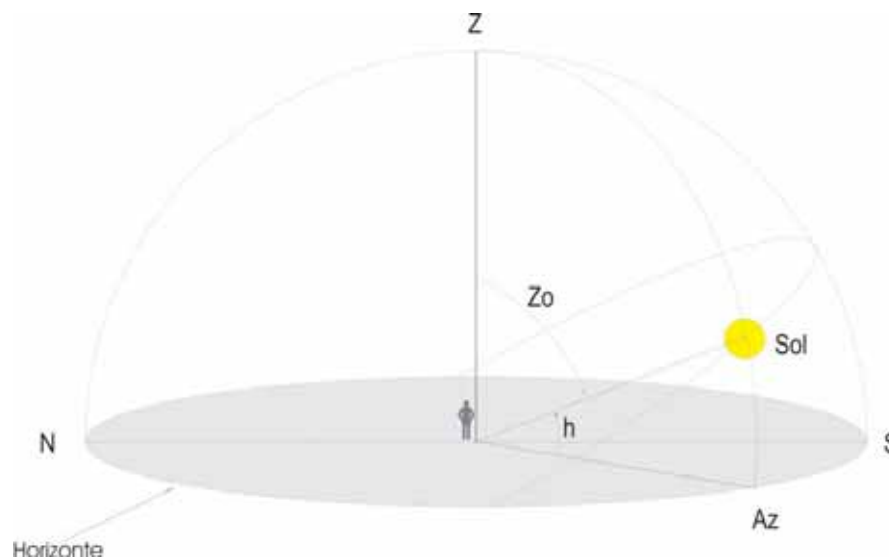


Figura 1.6. Sistema de coordenadas celestes horizontales

La distancia zenital es la distancia angular entre el zenit del observador y la posición del Sol; su complemento, la altura solar ( $h$ ), es la distancia angular entre el horizonte del observador y el Sol. El azimut es la distancia angular, medida desde el sur del lugar del observador y la proyección sobre el horizonte del meridiano del Sol que pasa por el zenit del observador ( $A_z$  es negativo hacia el Este y positivo hacia el Oeste; por lo tanto, varía entre  $-180^\circ \leq A_z \leq 180^\circ$ ).

### 1.5.2. Coordenadas celestes ecuatoriales

En el sistema ecuatorial, la posición del Sol está determinada por la declinación ( $\delta$ ) y el ángulo horario ( $\omega$ ). El ángulo horario ( $\omega$ ) es el ángulo formado en el polo por la intersección entre el meridiano del observador y el meridiano del Sol (Fig. 1.7); se expresa en unidades de arco (grados) o en unidades de tiempo (horas); su conversión es: 1 hora =  $15^\circ$ .



$$\omega = \frac{360^\circ}{24}(t-12) \text{ o } \omega = \frac{2\pi}{24}(t-12) \quad (1-5)$$

donde t es la hora local.

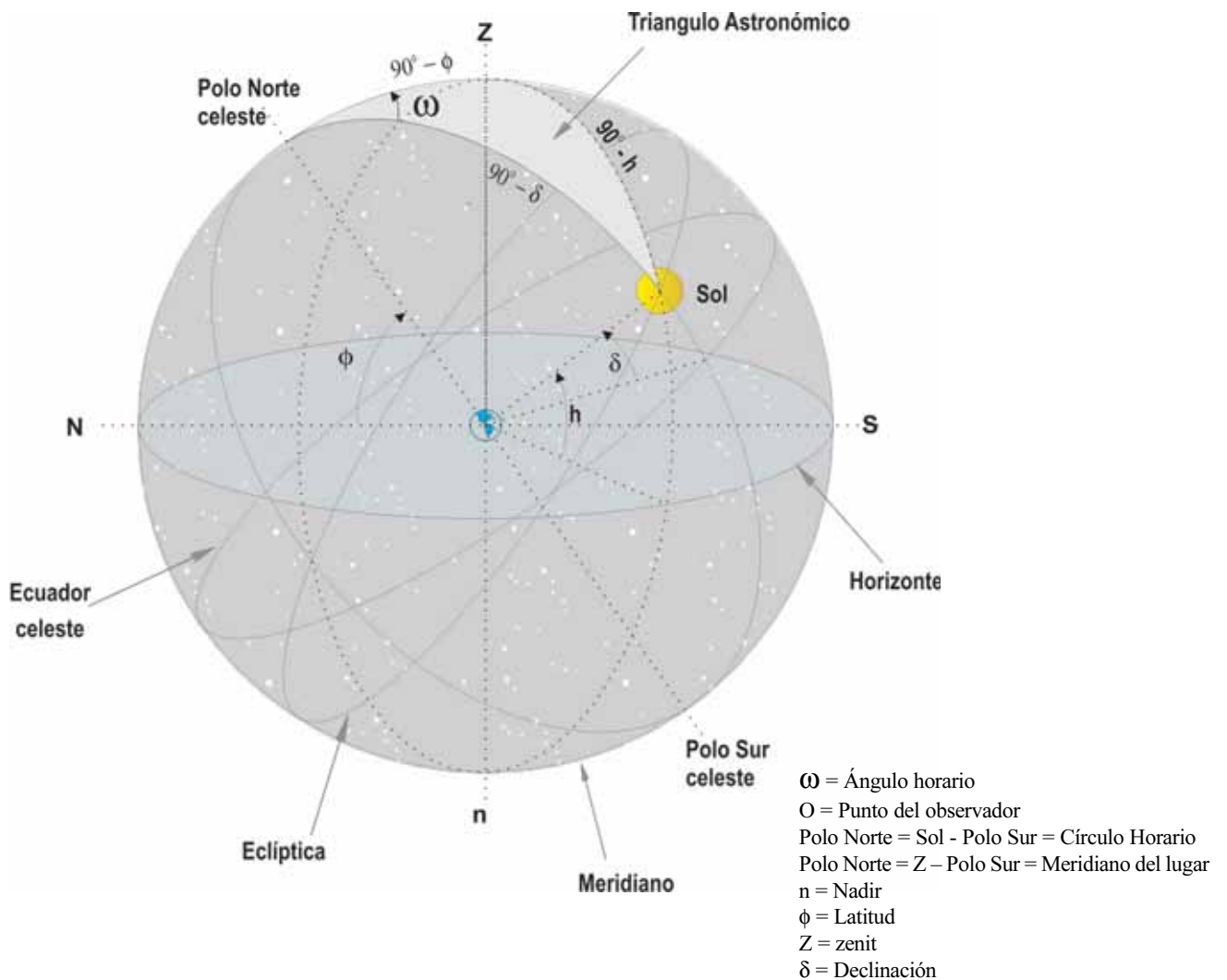


Figura 1.7. Sistema Coordenadas celestes ecuatoriales

### 1.5.3. Triángulo astronómico para la obtención de la posición del Sol

Combinando los dos sistemas de coordenadas, horizontales y ecuatoriales, se puede obtener el triángulo astronómico de la Figura 1.8, el cual se toma de la esfera celeste en la Figura 1.7 y es conformado por el

Polo Norte, N; el zenit, Z, y el Sol. En otras palabras, resulta de proyectar el meridiano del lugar (el que pasa por el zenit y los polos), el círculo horario (que pasa por los polos y el astro) y la vertical del astro (círculo que pasa por el zenit-nadir y el astro).

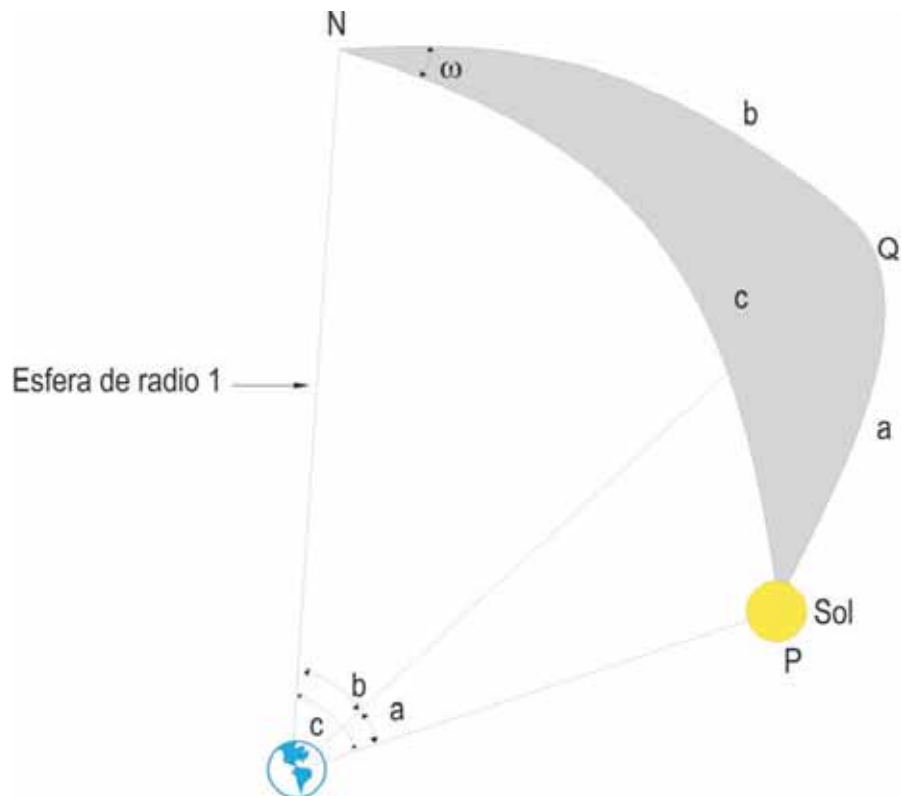


Figura 1.8. Triángulo astronómico

A partir de la posición del Sol en este triángulo esférico es posible establecer el ángulo de incidencia de la luz solar sobre una superficie horizontal o inclinada utilizando la llamada ley de los cosenos descrita por la ecuación de la trigonometría esférica.

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c \cos \omega \quad (1-6)$$

#### 1.5.4. Altura del Sol

Para hallar el valor de la altura solar se sustituyen los lados del triángulo astronómico (Polo Norte, N; el zenit, Z, y el Sol, o sea NQP) en la ecuación (1-6) por los valores  $a = 90^\circ - h$ ,  $b = 90^\circ - \phi$  y  $c = 90^\circ - \delta$

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ - \delta) + \text{sen}(90^\circ - \phi) \text{sen}(90^\circ - \delta) \cos \omega$$

Aplicando las identidades trigonométricas obtenemos

$$\text{sen } h = \text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \omega \quad (1-7)$$

donde la altura del Sol queda en función de la latitud del lugar, la declinación y el ángulo horario.

#### 1.5.5. Duración astronómica del día (N)

Es la duración en horas desde la salida hasta la puesta del Sol; se determina a partir de la ecuación (1.7), con-

siderando  $h = 0^\circ$  y  $h = 180^\circ$  (para la salida y puesta del Sol, respectivamente), despejando el ángulo horario  $\omega$  y de allí la duración del día. Cuando  $h = 0$  ó  $180$ ;

$$\cos \omega = \frac{-\text{sen } \phi \text{ sen } \delta}{\cos \phi \cos \delta} \quad (1-8)$$

$$\cos \omega_s = -\tan \phi \tan \delta \quad (1-9)$$

La duración del día se determina duplicando el ángulo horario  $\omega_s$  ("s" de salida del Sol) y dividiéndolo entre 15 para pasar de grados a horas.

$$N = \frac{2}{15} \arccos(-\tan \phi \tan \delta) \quad (1-10)$$

La ecuación (1-10) es válida si el valor absoluto de  $(-\tan \phi \tan \delta) \leq 1$ . Para las latitudes altas (mayores de  $66.6^\circ$ ), donde dependiendo de la época del año no se satisface esa condición, implica que los días pueden tener una duración igual a 24 horas, el Sol no se oculta, o igual a 0 horas, el Sol se mantiene por debajo del horizonte, dependiendo del día del año.

1.5.6. Dirección del haz de radiación

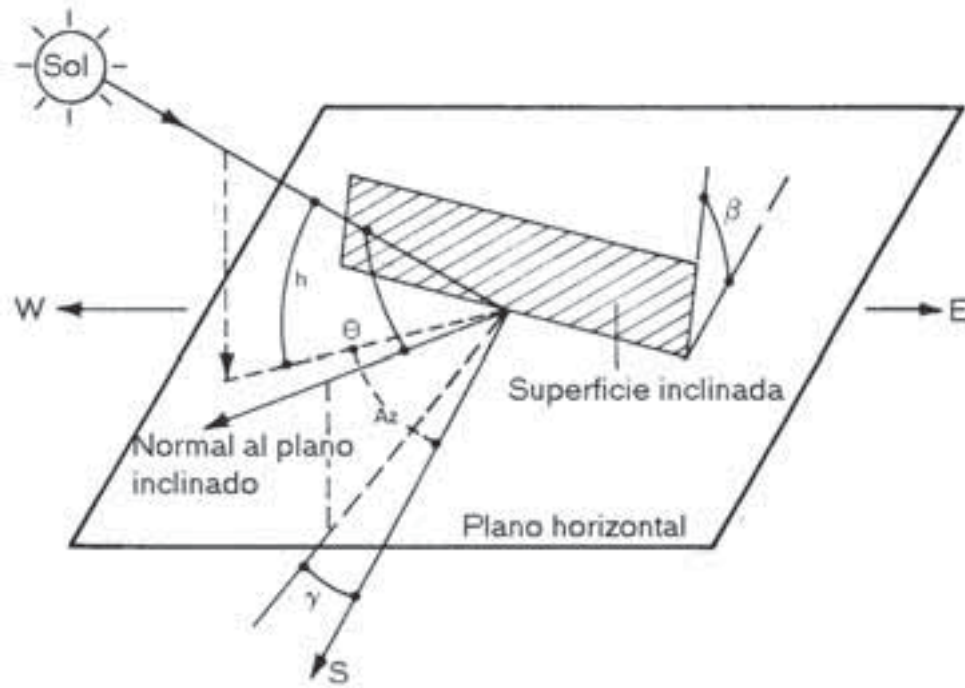


Fig. 1.9. Dirección del haz de radiación solar directa

La relación geométrica entre un plano con una orientación dada relativa a la Tierra y el haz de radiación solar, como se ilustra en la Figura 1.9, puede ser determinada a partir de la ecuación

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \text{sen}\delta \text{ sen}\phi \cos\beta - \text{sen}\delta \cos\phi \text{ sen}\beta \cos\gamma \\ &+ \cos\delta \cos\phi \cos\beta \cos\omega + \cos\delta \text{ sen}\phi \text{ sen}\beta \cos\gamma \cos\omega \\ &+ \cos\delta \text{ sen}\beta \text{ sen}\gamma \text{ sen}\omega \end{aligned} \quad (1-11)$$

donde:

$\beta$  = ángulo entre el plano dado y la superficie horizontal  $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$

$\gamma$  = ángulo azimut sobre la superficie; ver página 120, último párrafo, primera columna

$\theta$  = ángulo de incidencia formado por el haz de radiación sobre una superficie y la normal a la superficie.

1.6. Medida del tiempo

La medida del tiempo se fundamenta en la rotación de la Tierra sobre su eje polar y su translación alrededor del Sol. El tiempo se mide a partir del intervalo transcurrido entre dos pasos sucesivos del Sol frente a un mismo meridiano. Debido a que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es elíptica, los intervalos de tiempo entre los dos pasos varían día a día durante el año, razón por la cual se definen el tiempo solar verdadero y el tiempo solar medio.

1.6.1. Tiempo solar verdadero (TSV)

El tiempo solar verdadero (TSV) o LAT (local apparent time) es el tiempo real que determina el Sol a su paso sobre un meridiano y lo define el ángulo horario ( $\omega$ ) medido a partir del mediodía.

El tiempo solar no coincide con el tiempo local. Por lo tanto, es necesario corregir el tiempo aplicando dos correcciones.

- a) Corrección debida a la diferencia entre la longitud del meridiano del observador y el meridiano sobre el cual se basa la hora local estándar (en Colombia la hora estándar se basa en el meridiano 75° W). El Sol toma cuatro minutos para realizar un desplazamiento aparente de 1° de longitud;
- b) Corrección debida a las perturbaciones en la velocidad de rotación de la Tierra.

El TSV se determina mediante la ecuación

$$TSV = TSM + 4(L_s - L_L) + E_t \quad (1-12)$$

donde:

TSM = Tiempo solar medio

E<sub>t</sub> = Ecuación de tiempo

L<sub>s</sub> = Longitud geográfica del meridiano de referencia del país (en grados sexagesimales).

L<sub>L</sub> = Longitud geográfica del meridiano del lugar (en grados sexagesimales).

### 1.6.2. Tiempo solar medio (TSM)

Para eliminar las desigualdades del tiempo transcurrido entre los dos pasos sucesivos del Sol por un mismo meridiano, se definió el tiempo solar medio, o TSM, imaginando un sol ficticio que gire a velocidad constante y en forma circular alrededor de la Tierra, de modo que la duración de los días permanezca constante durante todo el año.

### 1.6.3. Ecuación de tiempo (E<sub>t</sub>)

Se define como ecuación de tiempo (E<sub>t</sub>) a la diferencia de tiempo entre el tiempo solar verdadero (TSV) y el tiempo solar medio (TSM), el cual varía diariamente en un intervalo pequeño entre -14 y 16 minutos. Spencer<sup>9</sup> desarrolló un modelo matemático en términos de una serie de Fourier, para calcular E<sub>t</sub> cualquier día del año con un error menor a 0,5 minutos. La Figura 1.10 muestra los valores de E<sub>t</sub> a lo largo del año.

$$E_t = (0,000075 + 0,001868 \cos\alpha - 0,032077 \operatorname{sen}\alpha - 0,014615 \cos\alpha - 0,040089 \operatorname{sen}2\alpha) \quad (229,18) \quad (1-13)$$

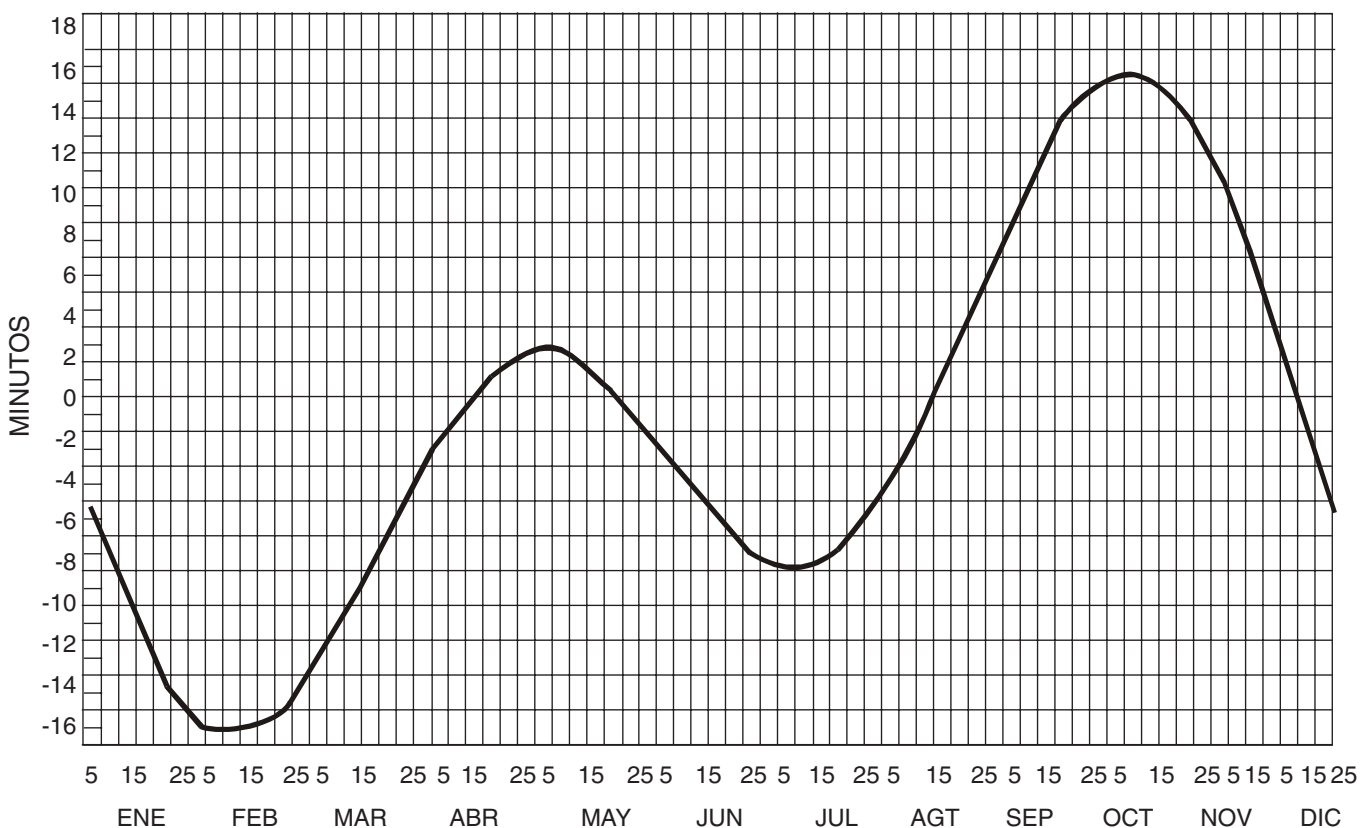


Fig. 1.10. Variación anual de la ecuación del tiempo

Ejemplo:

Para el día 16 de febrero a las 10 a. m. (hora local):

- Determinar el ángulo de incidencia del haz de radiación sobre una superficie con un ángulo de inclinación de  $30^\circ$  medido desde la horizontal, orientada  $15^\circ$  hacia el Oeste medidos desde el Sur y localizada en

- Leticia (Amazonas);
- Bahía Honda (Guajira)

### SOLUCIÓN

- Número del día: 47 (31 días de enero más 16 de febrero)
- De la ecuación (1-2)

$$\alpha = \frac{2\pi(47-1)}{365} = 0,79 \text{ radianes}$$

- De la ecuación (1-4)

$$\begin{aligned} \delta = & [0,006918 - 0,399912 \cos(0,79) + 0,070257 \sin(0,79) \\ & - 0,006758 \cos[2(0,79)] + 0,000907 \sin[2(0,79)] \\ & - 0,002697 \cos[3(0,79)] + 0,00148 \sin[3(0,79)]] (180/\pi) \\ & \delta = -12^\circ 36' \end{aligned}$$

- De la Ecuación (1-3)  $E_t \approx -14$  minutos

a) Para Leticia  $L_L = 69^\circ 57'$

$$TSV = 10:00 + 4(75^\circ - 69^\circ 57') - 14' = 10h 06 \text{ min}$$

b) Para Bahía Honda  $L_L = 71^\circ 48'$

$$TSV = 10:00 + 4(75^\circ - 71^\circ 48') - 14' = 09h 58 \text{ min}$$

- De la ecuación (1-5) el ángulo horario para Leticia  $\omega = -28^\circ 30'$  y Para Bahía Honda  $\omega = -30^\circ 30'$

a) Para Leticia

$$\phi = -4^\circ 09'$$

$$\gamma = 15^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

- De la ecuación (1-11)

$$\begin{aligned} \cos\theta = & \sin(-12^\circ 36') \sin(-4^\circ 09') \cos(30^\circ) - \sin(-12^\circ 36') \\ & \cos(-4^\circ 09') \sin(30^\circ) \cos(15^\circ) + \cos(-12^\circ 36') \\ & \cos(-4^\circ 09') \cos(30^\circ) \cos(-28^\circ 30') + \cos(-12^\circ 36') \\ & \sin(-4^\circ 09') \sin(30^\circ) \cos(15^\circ) \cos(-28^\circ 30') \\ & + \cos(-12^\circ 36') \sin(30^\circ) \sin(15^\circ) \sin(-28^\circ 30') \\ & \theta = 39^\circ 42' \end{aligned}$$

b) Para Bahía Honda

$$\phi = 12^\circ 19'$$

$$\gamma = 15^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

- De la ecuación (1-11)

$$\begin{aligned} \cos\theta = & \sin(12^\circ 36') \sin(12^\circ 19') \cos(30^\circ) - \sin(-12^\circ 36') \\ & \cos(12^\circ 19') \sin(30^\circ) \cos(15^\circ) + \cos(-12^\circ 36') \\ & \cos(12^\circ 19') \cos(30^\circ) \cos(-30^\circ 30') + \cos(-12^\circ 36') \\ & \sin(12^\circ 19') \sin(30^\circ) \cos(15^\circ) \cos(-30^\circ 30') \\ & + \cos(-12^\circ 36') \sin(30^\circ) \sin(15^\circ) \sin(30^\circ 30') \\ & \theta = 37^\circ 11' \end{aligned}$$

- Determinar la duración del día: Solución de la ecuación (1-10) se obtiene:

a) Para Leticia

$$N = \frac{2}{15} \arccos[-\tan(-4^\circ 09') \tan(-12^\circ 36')]$$

$$N = 12:07 \text{ horas: minutos}$$

b- Para Bahía Honda

$$N = \frac{2}{15} \arccos[-\tan(12^\circ 19') \tan(-12^\circ 36')]$$

$$N = 11 : 37 \text{ horas: minutos}$$

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Duffie, J. A., y Beckman, W. A. Solar Engineering of Thermal Processes. New York: John Wiley & Sons, 919p, 1991.
2. Garavito, C., y Hernández, H. Revista PROCIENCIA. Bogotá: Vol. 5 - N° 2, 119p, 1982.
3. Iqbal, M. An Introduction to Solar Radiation. Vancouver, Canada: Academic Press, 377p, 1983.
4. Iamap. Revised Introduction Manual on Radiation Instruments and Measurements. WMO/TD-N° 149. Ginebra: WCRP Publications Series N° 7, 134p, 1986.
5. Jansen, T. J. Solar Engineering Technology. New Jersey: Prentice Hall, 205p, 1985.
6. Kreith, F., y Kreider, J. F. Principles of Solar Engineering. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 725p, 1978.
7. Robinson, N. Solar Radiation. Haifa, Israel: Elsevier Publishing Company, 343p, 1966.
8. Simbaqueva, O. Factores astronómicos y geográficos que afectan la radiación solar incidente sobre la superficie terrestre. Bogotá: Himat, 37p, 1990.
9. Spencer, J. W. Fourier Series Representation of the Position of the Sun. Search 2(5), 172p, 1971.